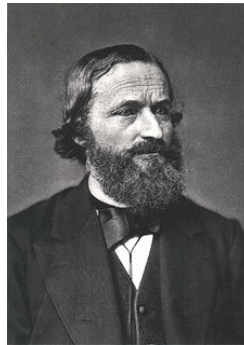


9. Kirchhoffovy zákony (německý fyzik Gustav Kirchhoff (1847)) řeší základní vztahy v elektrických obvodech.



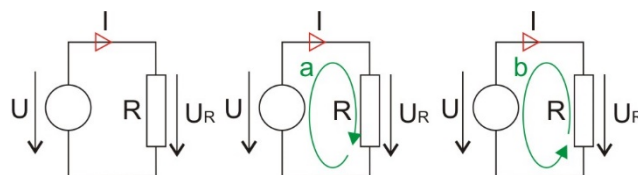
První Kirchhoffův zákon říká, že součet proudů do uzlu tekoucích je roven nule.

Druhý Kirchhoffův zákon říká, že součet napětí ve smyčce je roven nule.

Podívejme se na ně z pohledu řešení elektrických obvodů a vysvětleme si je na jednoduchých praktických příkladech.

Druhý Kirchhoffův zákon – součet napětí ve smyčce je roven nule

Příklad 1: Mějme jednoduchý elektrický obvod, kde je připojen odpor k ideálnímu zdroji napětí (obrázek vlevo). Odpor se zdrojem tvoří smyčku. Součet napětí v této smyčce musí být roven nule. Vidíme, že napětí na zdroji má opačnou polaritu než napětí na odporu. Jedno z těchto napětí, třeba napětí zdroje, budeme považovat za kladné. Pak napětí na odporu je záporné. Použijeme-li Kirchhoffa, pak $U + (-U_R) = 0$, nebo po úpravě $U = U_R$. Toto je dokonce logicky vidět i ze schématu zapojení. Protéká-li proud I odporem R , pak na něm vzniká úbytek napětí, jehož směr je na obrázku také jasný. Pak proud odporem bude u Ohmova zákona $I = U/R$.



Nyní to pro starší a zvědavější zkusíme vše provést matematicky, přesně v souladu s Kirchhoffovým zákonem.

Do obrázku si nakrelíme pomocnou smyčku, podle které budeme vyjadřovat součet napětí ve smyčce. Je úplně jedno, jestli smyčku uděláme ve směru jaký má smyčka a nebo b. Dokonce je jedno, jestli budeme nejprve vyjadřovat napětí U nebo U_R . Půjde-li napětí ve směru naší pomocné šipky od + k -, do součtu dame napětí se znaménkem +, půjde-li proti směru, pak jej do součtu dame se znaménkem -. Stačí udělat jen jednu smyčku, pro ukázkou, že je to stejné. Zde vyřešíme obvod I podle druhé pomocné smyčky.

Nejprve vyřešíme obvod podle smyčky **a**. Začneme třeba u napětí na odporu U_R . Šipka napětí U_R je ve směru smyčky, proto toto napětí bude v rovnici kladné. Naopak napětí U jde proti směru smyčky, bude v rovnici se znaménkem minus. Součet napětí ve smyčce je

$$+U_R + (-U) = 0$$

Odstraníme závorku

$$+U_R - U = 0$$

Převědeme v rovnici U na pravou stranu, na levé se U odečítá, na pravé se tedy obrací znaménko na plus

$$U_R = U$$

Dosazením do rovnice vytvořené podle Kirchhoffova zákona pomocí Ohmova zákona vyjádřeného $U_R = R \cdot I$

dostaneme vzorec pro výpočet proudu I .

$$R \cdot I = U$$

Počítáme velikost I , proto jej necháme na levé straně rovnice a R převědeme na pravou stranu rovnice. Na levé straně se R násobí, na pravé jím budeme dělit.

$$\text{Proud odporem je } I = U/R$$

Nyní můžeme ověřit výpočet podle smyčky **b**.

$$-U_R + U = 0$$

$$-U_R = -U$$

Vynásobíme obě strany rovnice -1 , abychom se zbavili minus na levé straně rovnice.

$$U_R = U$$

pomocí Ohmova zákona vyjádřím $U_R = R \cdot I$

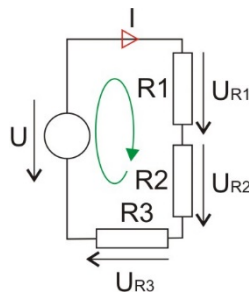
a U_R dosadím do rovnice smyčky.

$$R \cdot I = U$$

$$\text{Proud odporem je } I = U/R$$

Vidíme, že oba postupy nás přivedly ke stejnému výsledku a to je důležité. Postup je v obou případech správný.

Příklad 2: Odvodíme si vzorec pro sériové řazení odporů (někdy také se mu říká zapojení za sebou).



Podle Kirchhoffova zákona vytvoříme rovnici $U_{R1} + U_{R2} + U_{R3} - U = 0$, kterou pak podle Ohmova zákona doplníme o vyjádření napětí na jednotlivých odporech.

$$U_{R1} + U_{R2} + U_{R3} = U$$

$$I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 = U$$

Podle předchozího příkladu je $U = R \cdot I$, kde R je celkový odpor obvodu, tedy odpor sériového zapojení R_1 , R_2 a R_3 . $I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 = I \cdot R$ vytkneme na levé straně I a dostaneme $I \cdot (R_1 + R_2 + R_3) = I \cdot R$.

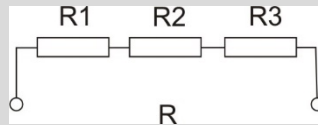
Vydělíme levou i pravou stranu proudem ($I/I = 1$)

$$I/I \cdot (R_1 + R_2 + R_3) = I/I \cdot R \quad 1 \cdot (R_1 + R_2 + R_3) = 1 \cdot R \quad \text{jedničky sem již psát nemusíme,}$$

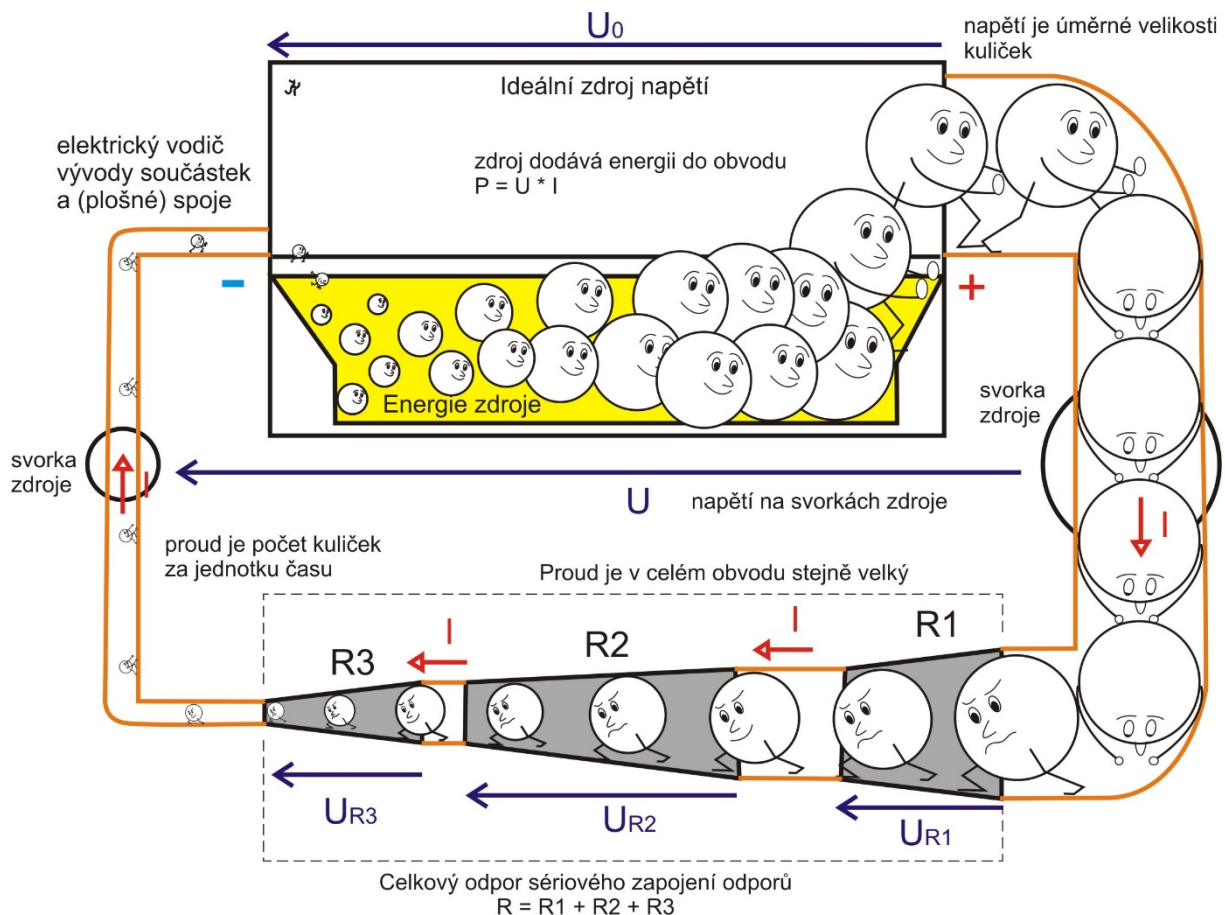
tím jsme I z rovnice odstranili a výsledná rovnice je $R_1 + R_2 + R_3 = R$.

Odpor R sériově zapojených odporů je dán jejich součtem

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$



Zase si můžeme názorně ukázat vše, co bylo doposud řečeno, a říci si i něco navíc.



Vidíme zde mimo jiné, že zdroj dodává energii do obvodu. Energie je zde jako voda v bazénu, která regeneruje kuličky. Pokud půjde o baterii, pak je v ní předem určené množství energie. Když ji spotřebujeme, baterie se vybit. Nabíjecím článkům můžeme v nabíječce opět energii doplnit. Pokud budeme mít síťový zdroj, energie se trvale do bazénu doplňuje ze sítě (z elektrické sítě). Pokud však takový zdroj od sítě odpojíme, velmi rychle přestane energii dodávat.

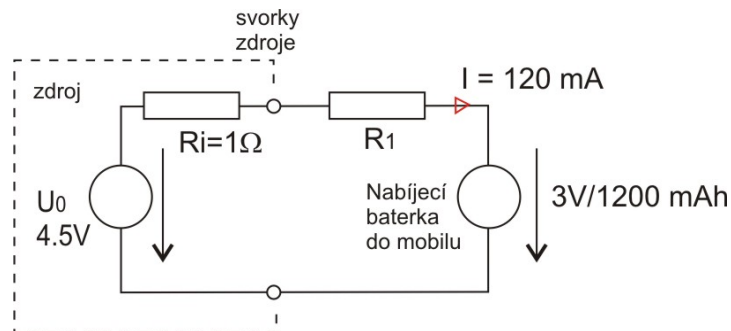
Příklad 3: Jsme na dovolené. Zapomněli jsme si doma nabíječku na mobil. Mobil ale potřebujeme používat, jak jej tedy lze nabít? Máme sebou plochou baterii 4.5V (její vnitřní odpor je 1 Ω). Baterka z mobilu je na 3V a má kapacitu 1200 mAh (je schopna například dodávat proud 1.2 A po dobu 1 hodiny, nebo 12 mA po dobu 100 hodin).

Pamatujeme si, že při nabíjení nabíjitelných baterek je vhodné nabíjet proudem o velikosti 1/10 kapacity nabíjené baterky po dobu 12 hodin (mělo by stačit nabíjet po dobu 10 hodin, ale nabíjíme raději o 20 procent času déle, aby se pokryly ztráty, které se při nabíjení mohou projevit).

Z toho plyne, že naši baterku z mobilu budeme nabíjet proudem 120 mA po dobu 12 hodin.

Poznámka: Kdybychom například chtěli nabíjet autobaterii, která má kapacitu 42 Ah, pak bychom ji optimálně nabíjeli proudem 4.2 A.

Jak zapojíme naši nabíječku je na následujícím obrázku.

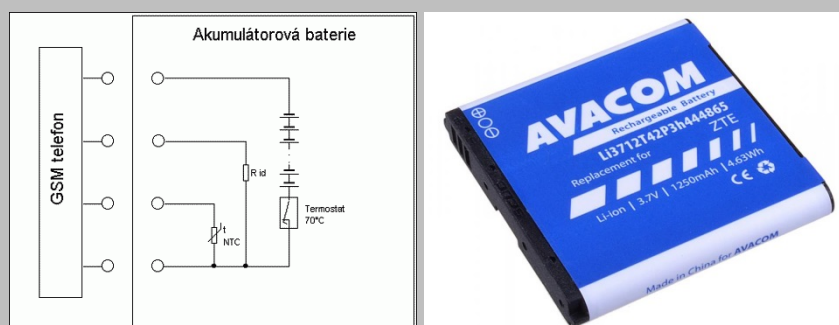


Jediné, co neznáme, je velikost odporu R1. Na odporu Ri dojde k úbytku napětí $R_i \cdot I = 0.12 \cdot 1 = 0.12V$.

Jaký má být úbytek napětí na R1? Napětí zdroje mínus napětí na R1 mínus napětí baterky z mobilu = $4.5 - 0.12 - 3 = 1.38V$. Takovýto úbytek napětí musí vzniknout, protéká-li odporem nabíjecí proud I, tedy 0.12 A. Podle Ohmova zákona zjistíme, že odpor musí mít velikost $1.38 / 0.12 = 11.5 \Omega$. Kde vzít odpor? V autě máme náhradní žárovky 12V/6W ($I = P/U = 0.5A$). Jejich odpor je 24Ω ($R = U/I = 12 / 0.5 = 24$). Zapojíme dvě paralelně a budeme mít odpor přibližně 12Ω , můžeme je tedy použít místo odporu 11.5Ω a máme tedy nabíječku hotovou. Už stačí jen několik drátů na propojení a je to.

Poznámka: Když už zde hovoříme o bateriích (akumulátorech – nabíjitelná baterie) mobilních telefonů, tak je na místě ještě podotknout, jak je baterie zapojena. Zajímavý článek je zde: <http://www.battex.info/hermeticke-akumulatory/baterie-sestavene-z-hermetickych-akumulatoru-nejcastejsi-zapojeni/typicka-zapojeni-ochrannych-a-ridicich-obvodu-akumulatorovych-baterii/baterie-pro-mobilni-telefon>

Vnitřní zapojení typické baterie pro mobil je zde.



Rid – odpor, který slouží k identifikaci baterie. Podle velikosti tohoto odporu mobil pozná, jakou má připojenou baterii. Termistor (teplotně závislý odpor) slouží pro měření teploty článků uvnitř baterie, která je důležitá při nabíjení. Při nabíjení se baterie zahřívá a teplota nesmí překročit jistou mez, danou typem baterie. Nabíječka podle této teploty reguluje nabíjecí proud. Termostat (vratná tepelná pojistka) zapojený do série s článkem chrání baterii před zničením při jejím přetížení a zkratu.

Na obrázku je zapojení, které se využívalo hlavně u NiMH baterií, kde bylo třeba rozeznat, zda má baterie kapacitu např. 600 mAh nebo 1200 mAh. V současné době, kdy většina telefonů používá Li-baterie, je zapojení většinou "třídrátové", tedy plus a minus a teplotní čidlo. U baterií Samsung nebo některých typů i-Podů a dalších chytrých telefonů je na jednom z kontaktů vývod z antény, která neslouží pro komunikaci mezi baterií a telefonem, ale pro komunikaci telefonu s dalšími zařízeními (s jiným telefonem, pro platby, identifikaci vstupu, atd.).

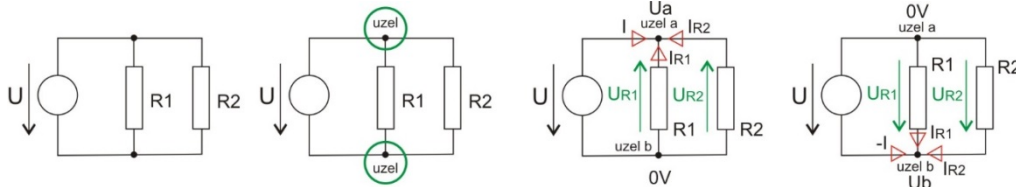
Kapacita baterie a kde je + a – je obvykle na baterii uvedeno.

Vidíte, jak nám Ohmův zákon a Kirchhoffovy zákony mohou pomoci v nesnázích.

První Kirchhoffův zákon – součet proudů tekoucích do uzlu je roven nule

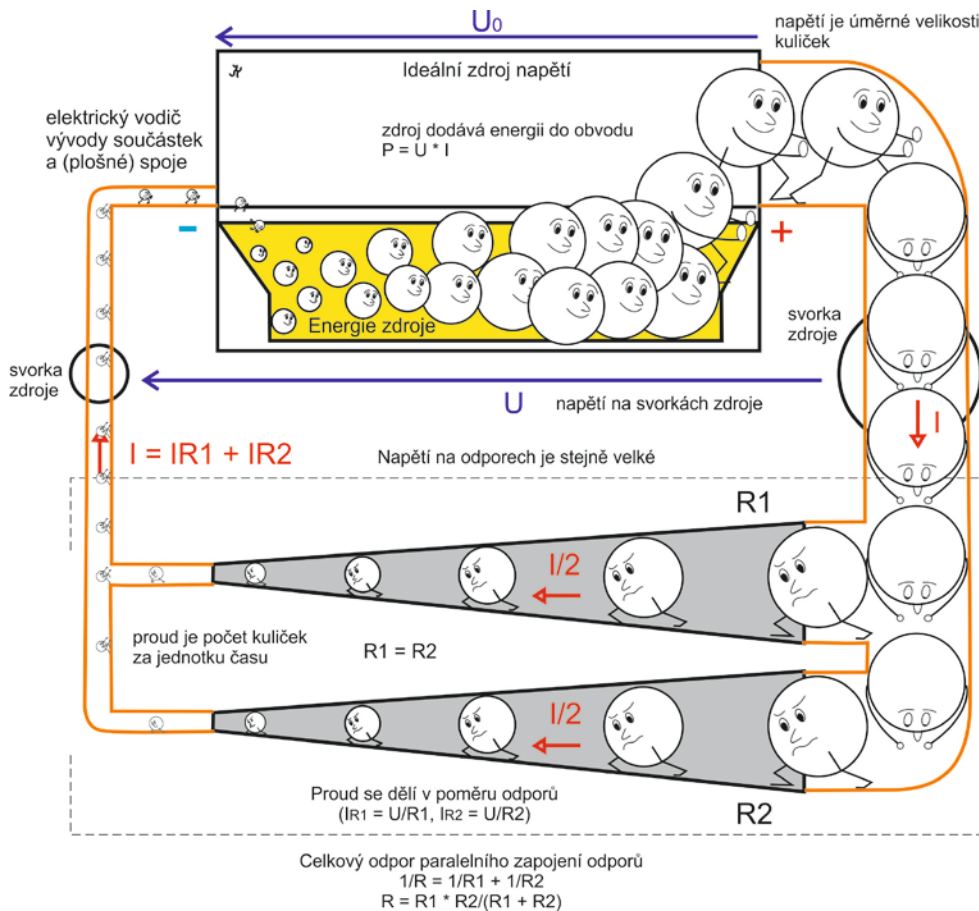
Proudy tekoucí do uzlu budeme označovat jako kladné, proudy z uzlu vytékající pak jako záporné. Můžeme tedy jinými slovy říct, že součet proudů do uzlu vtékajících je stejný jako součet proudů z uzlu vytékajících. Co do uzlu vteče, musí také vytéct.

Příklad 4: Mějme jednoduchý elektrický obvod, kde jsou dva odpory spojené paralelně (někdy nazývané jako zapojení vedle sebe) připojeny k ideálnímu zdroji napětí (obrázek vlevo). Potřebujeme vypočítat proud, který dodává zdroj a proudy tekoucí oběma odpory.



Pokusíme se to nejdřív vypočítat logickou úvahou. Jak vidíme na schématu zapojení, na obou odporech je stejně velké napětí o velikosti U. Proud odporem $I_{R1} = U/R_1$ teče od plusu zdroje k jeho mínusu, podobně jako proud odporem $I_{R2} = U/R_2$. Zdroj musí dodat oba proudy, tedy proud ze zdroje je $I = I_{R1} + I_{R2}$.

Větším odporem teče menší proud a menším teče proud větší. Proud se větví v poměru velikosti odporů. Jsou-li oba odpory stejně velké, pak je proud oběma odpory stejně velký.



Nyní k výpočtu přistoupíme exaktnějším způsobem, přesně ve smyslu prvního Kirchhoffova zákona.

Vidíme, že obvod má dva uzly (druhý obrázek vlevo) – **uzel je místo, kde jsou vodivě spojeny nejméně 3 vývody součástek dohromady**. Zde jsou dva uzly a v každém jsou propojeny právě tři součástky-zdroj napětí a dva odpory.

Jeden z uzlů označíme jako referenční (kam bychom zapojili například COM, někdy označovaný jako minus, vývod voltmetru, když bychom chtěli měřit napětí uzlů). Na obrázcích vpravo jsou ukázány oba případy, kdy jsme označili referenční uzel jako uzel a a uzel b, abychom si ukázali, že je jedno, který uzel určíme za referenční.

Označíme proudy do uzlů, které nejsou referenční. Nakonec vyjádříme Kirchhoffův zákon – součet proudů do uzlu tekoucí je 0. Pokud by nám některý z proudů vyšel záporný, znamená to, že ve skutečném obvodu teče tento proud opačným směrem.

Uděláme si rovnici podle prvního Kirchhoffova zákona, třeba pro uzel a, kdy uzel b je referenční.

$$I + I_{R1} + I_{R2} = 0$$

Nyní vyjádříme proudy pomocí uzlových napětí. Podívejte se na třetí obrázek. Aby tekla proud odpory naznačeným směrem, musí být na nich úbytek napětí tak, jak naznačuje zelená šipka napětí. Podle Ohmova zákona proud vyjádříme (napětí uzlu b minus napětí uzlu a děleno odporem).

$$I_{R1} = U_{R1}/I_{R1} = (0 - U_a)/R_1$$

$$I_{R2} = U_{R2}/I_{R2} = (0 - U_a)/R_2.$$

Dosadíme do rovnice $I + I_{R1} + I_{R2} = 0$

$$I + (0 - U_a)/R_1 + (0 - U_a)/R_2 = 0$$

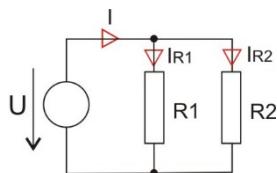
$$I - U_a/R_1 - U_a/R_2 = 0.$$

Ze zapojení vyplývá, že $U_a = U$

$I + I_{R1} + I_{R2} = 0$ je po dosazení $I - U/R_1 - U/R_2 = 0$.

Proud I ze zdroje je zde $I = U/R_1 + U/R_2$ a je kladný, proto je jeho směr shodný se směrem, který jsme v uzlu naznačili. Proud odporem $I_{R1} = -U/R_1$ je v rovnici záporný, proto ve skutečnosti teče opačným směrem. Totéž platí I proud odporem $I_{R2} = -U/R_2$.

Můžeme si nyní zapojení a označení proudů zakreslit podle toho, jak je to ve skutečnosti. Doplnit můžeme i vypočtené hodnoty.



$$I = U/R_1 + U/R_2, I_{R1} = U/R_1, I_{R2} = U/R_2$$

Pro kontrolu můžeme zkusit totéž vypočítat tak, že si uděláme rovnici podle prvního Kirchhoffova zákona pro uzel b, kdy uzel a bude referenční.

$$I + I_{R1} + I_{R2} = 0$$

Nyní vyjádříme proudy pomocí uzlových napětí. Podívejte se na čtvrtý obrázek. Aby tekla proud udpory naznačeným směrem, musí být na nich úbytek napětí tak, jak naznačuje zelená šipka napětí. Podle Ohmova zákona proud vyjádříme (napětí uzlu b minus napětí uzlu a děleno odporem).

$$I_{R1} = U_{R1}/I_{R1} = (0 - U_b)/R_1$$

$$I_{R2} = U_{R2}/I_{R2} = (0 - U_b)/R_2.$$

Dosadíme do rovnice $I + I_{R1} + I_{R2} = 0$

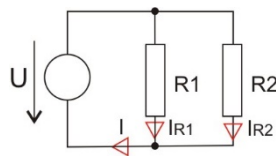
$$I + (0 - U_b)/R_1 + (0 - U_b)/R_2 = 0$$

$$I - U_b/R_1 - U_b/R_2 = 0.$$

Ze zapojení vyplývá, že $U_b = -U$.

$I + I_{R1} + I_{R2} = 0$ je po dosazení $I + U/R_1 + U/R_2 = 0$.

Proud I ze zdroje je zde $I = -U/R_1 - U/R_2$ a je záporný, proto je jeho směr opačný než směr, který jsme v uzlu naznačili. Proud odporem $I_{R1} = U/R_1$ je v rovnici kladný, proto ve skutečnosti teče stejným směrem. Totéž platí I proud odporem $I_{R2} = U/R_2$.



$$I = U/R_1 + U/R_2, I_{R1} = U/R_1, I_{R2} = U/R_2$$

Vidíme, že oba způsoby dospěly ke stejnému výsledku. A tak je potvrzeno, že výpočet je nezávislý na volbě referenčního uzlu.

Z vypočteného můžeme odvodit ještě několik zajímavých a důležitých závěrů.

Vzorec pro výpočet paralelního zapojení odporů

Pro dva platí

$$I = U/R_1 + U/R_2$$

$$I = U \cdot (1/R_1 + 1/R_2).$$

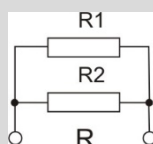
I je proud ze zdroje do celkového odporu R složeného paralelně zapojenými odpory.

$I = U/R$ po dosazení do rovnice vychází

$$U/R = U \cdot (1/R_1 + 1/R_2), \text{ obě strany rovnice vydělíme } U.$$

Paralelní zapojení odporů

Pro dva odpory



$$1/R = 1/R_1 + 1/R_2$$

$$R = R_1 * R_2 / (R_1 + R_2)$$

Dva stejné odpory paralelně

$$R = R/2$$

Více odporů

$$1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + \dots$$

Výsledný odpor paralelního zapojení je menší než velikost nejmenšího odporu

Cvičení:

1. Jaký bude výsledný odpor sériového a paralelního zapojení dvou odporů 100 Ω?
2. Ověřte výpočtem, že platí $1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4$.